

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

08. 07. 2022 г.

ТЕМА ВТОРА

КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

ОЦЕНКАТА СЕ ФОРМИРА ПО ФОРМУЛА: ОЦЕНКА = 2 + 0,2 · K, където K е броят на получените точки.

БЛАНКА С ОТГОВОРИ

ЗАДАЧА 1	ЗАДАЧА 2	ЗАДАЧА 3	ЗАДАЧА 4	ЗАДАЧА 5	ЗАДАЧА 6	ЗАДАЧА 7	ЗАДАЧА 8	ЗАДАЧА 9	ЗАДАЧА 10
1 ТОЧКА	1 ТОЧКА	1 ТОЧКА	2 ТОЧКИ	2 ТОЧКИ	2 ТОЧКИ	2 ТОЧКИ	3 ТОЧКИ	3 ТОЧКИ	3 ТОЧКИ
Б	В	А	В	А	Б	Г	А	А	В

ЗАДАЧА 1. (1 ТОЧКА) Корени на уравнението $2^x - 2 = 15 \cdot 2^{\frac{x-3}{2}}$ са:

- A) 5 и $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) 5 C) $4\sqrt{2}$ и $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) няма реални корени

РЕШЕНИЕ: Полагаме $y = 2^{\frac{x}{2}}$, $y > 0 \Rightarrow y^2 - \frac{15}{\sqrt{2}} \cdot y - 2 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2} \cdot y^2 - 15y - 4\sqrt{2} = 0$

$$\Rightarrow y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} < 0 - \text{не е реш. за } y; y_2 = 4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}} > 0 \text{ и } 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = 5.$$

ЗАДАЧА 2. (1 т.) Стойността на израза $\sqrt{5^{\log_6 5} + 7^{\log_8 7}} \sqrt{25} + \sqrt{49}$ е равна на:

- A) 5 B) 7 C) 10 D) 12

РЕШЕНИЕ:

$$\sqrt{5^{\log_6 5} + 7^{\log_8 7}} = \sqrt{5^{\log_5 6^2} + 7^{\log_7 8^2}} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

ЗАДАЧА 3. (1 т.) Корени на уравнението $\frac{x+1}{|x-1|} - 5 \cdot \frac{|x-1|}{x+1} + 4 = 0$ са:

- A) 0 B) 0 и 1 C) 0; $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$ D) 1

РЕШЕНИЕ: Полагаме $y = \frac{x+1}{|x-1|}$ и ДМ $x \neq \pm 1 \Rightarrow y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow$

$$y_1 = -5 = \frac{x+1}{|x-1|} \Rightarrow \begin{cases} 1. \text{ При } x < 1 \text{ и } \text{ДМ } x \neq \pm 1 \Rightarrow \frac{x+1}{1-x} = -5 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} > 1 - \text{ не е реш. за } x \\ 2. \text{ При } x > 1 \text{ и } \text{ДМ } x \neq \pm 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = -5 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} < 1 - \text{ не е реш. за } x \end{cases}$$

$$y_2 = 1 = \frac{x+1}{|x-1|} \Rightarrow \begin{cases} 1. \text{ При } x < 1 \text{ и } \text{ДМ } x \neq \pm 1 \Rightarrow \frac{x+1}{1-x} = 1 \Rightarrow x_3 = 0 \{x_3 < 1 \text{ и } x_3 \in \text{ДМ}\} - \text{е решение за } x \\ 2. \text{ При } x > 1 \text{ и } \text{ДМ } x \neq \pm 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow 0 \cdot x = -2 \Rightarrow \text{няма решене} \end{cases}$$

ЗАДАЧА 4. (2 т.) Корените на уравнението $3 - \sqrt{3x^2 - 4x + 9} = -x$ са:

- A) $\sqrt{3}$ и 5 B) $\sqrt{3}$ C) 0 и 5 D) $\sqrt{3}$ и 3

РЕШЕНИЕ:

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 9} = x + 3 \Rightarrow \text{ДМ } 3x^2 - 4x + 9 \geq 0 \text{ и } x + 3 \geq 0 \Rightarrow \text{ДМ } x \geq -3$$

$$3x^2 - 4x + 9 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x_1 = 0 \in \text{ДМ} \text{ и } x_2 = 5 \in \text{ДМ}.$$

ЗАДАЧА 5.

(2 т.) Сборът на членовете на аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ е $5n^2 - 4n$. Числата d и a_5 са равни на:

A) 10 и 41

B) 8 и 38

B) 8 и 40

G) 9 и 45

РЕШЕНИЕ: При $n = 1 \Rightarrow S_1 = a_1 = 5 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 1$;

При $n = 2 \Rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 \Rightarrow a_2 = 11 \Rightarrow d = 10$ ($d = a_2 - a_1$) и $a_5 = 41$ ($a_5 = a_1 + 4d$).

ЗАДАЧА 6.

(2 т.) Ако $\sin \alpha \cos \alpha = 0,25$, то $\tan \alpha + \cot \alpha$ е:

A) $1/4$

B) 4

B) 1

G) $25/2$

РЕШЕНИЕ: $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{1/4} = 4$.

ЗАДАЧА 7.

(2 т.) Дадено е уравнението $m \cdot x^2 - (m^2 - m - 12)x + 37 = 0$. Ако $x_1 = -x_2$, то m е равно на:

A) 0

B) 1,2

B) 1

G) -3

РЕШЕНИЕ: $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 = \frac{m^2 - m - 12}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = -x_1^2 = \frac{37}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m - 12 = 0 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m_1 = 4 > 0 \\ m_2 = -3 < 0 \end{cases} \Rightarrow m = -3$

ЗАДАЧА 8.

(3 т.) Даден е равнобедрен триъгълник с основа 30 см и височена 20 см. Височината спусната от бедрото е равна на:

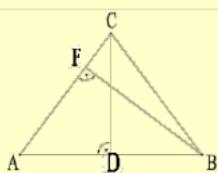
A) 24 см

B) 16,5 см

B) 26 см

G) 18 см

РЕШЕНИЕ:



От ΔADC ($\angle ADC = 90^\circ$) $\Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$
 $S_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{AC \cdot BF}{2} \Rightarrow BF = \frac{AB \cdot CD}{AC} = \frac{30 \cdot 20}{25} \Rightarrow BF = 24$.

ЗАДАЧА 9.

(3 т.) Около окръжност с радиус 6 м е описан правоъгълен трапеци с най-малка страна 9 м. Лицето на трапеца е равно на:

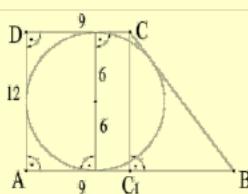
A) 162 м^2

B) $136\sqrt{2} \text{ м}^2$

B) 184 м^2

G) $120\sqrt{3} \text{ м}^2$

РЕШЕНИЕ:



Вписана окръжност в трапеци $\Rightarrow AB + CD = BC + AD \Rightarrow BC = AB - 3$;

От ΔCC_1B ($\angle CC_1B = 90^\circ$) $\Rightarrow BC^2 = BC_1^2 + CC_1^2$

$$\Rightarrow (AB - 3)^2 = (AB - 9)^2 + 12^2 \Rightarrow AB = 18$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot (AB + CD) \cdot CC_1 = \frac{18+9}{2} \cdot 12 \Rightarrow S = 162 \text{ м}^2$$

ЗАДАЧА 10.

(3 т.) В правоъгълен триъгълник е вписана полуокръжност, диаметърът на която лежи на хипотенузата, а центърът ѝ я дели на отсечки с дължини 15 см и 20 см. Радиусът на окръжността е равен на:

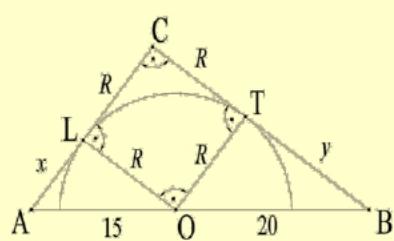
A) 25 см

B) 30 см

B) 12 см

G) 28 см

РЕШЕНИЕ:



$CTOL$ – квадрат. Нека $LO = OT = R$ и $AL = x$; $BT = y$.

$$\text{От } \Delta AOL \sim \Delta OBT \Rightarrow \begin{cases} \frac{LO}{TB} = \frac{AO}{OB} \Rightarrow \frac{R}{y} = \frac{15}{20} \Rightarrow y = \frac{4R}{3} \\ \frac{AL}{OT} = \frac{AO}{OB} \Rightarrow \frac{x}{R} = \frac{15}{20} \Rightarrow x = \frac{3R}{4} \end{cases}$$

От ΔABC ($\angle ACB = 90^\circ$) $\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$\Rightarrow 35^2 = (x + R)^2 + (y + R)^2 \Rightarrow 35^2 = \left(\frac{3R}{4} + R\right)^2 + \left(\frac{4R}{3} + R\right)^2 \Rightarrow R = 12$$