

**ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ “ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ” - СОФИЯ**

**КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА**

**31. 03. 2018 г.**

**ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ - ВТОРИ ВАРИАНТ**

**Зад.1** (6 точки)

а) (2 точки) Да се реши уравнението  $4^x - 2^x - 2 = 0$ .

Полагаме  $2^x = y > 0$  и получаваме  $y^2 - y - 2 = 0$  с корени  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = -1 < 0$ .  
Тогава само  $y_1 = 2$  дава решение  $x = 1$ .

б) (2 точки) Да се реши уравнението  $|x - 2| - 5 = 0$ .

Тогава  $|x - 2| = 5$ , което е еквивалентно на:

$$\begin{array}{ll} x - 2 = 5 & x - 2 = -5 \\ x_1 = 7 & x_2 = -3. \end{array}$$

в) (2 точки) Да се реши системата:  $\begin{cases} x + 2y = 2xy \\ x - y = 1 \end{cases}$ .

От второто уравнение изразяваме  $x = y + 1$  и заместваме в първото. След преработване получаваме  $2y^2 - y - 1 = 0$  с корени  $y_1 = 1$  и  $y_2 = -\frac{1}{2}$ .

Тогава решенията са:

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 1 \text{ и } x_2 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -\frac{1}{2}.$$

**Зад.2** (6 точки)

а) (2 точки) За аритметична прогресия са в сила равенствата  $S_3 = 9$  и  $S_5 = 25$ .  
Да се намери  $S_8$ .

От формулата за сума на аритметична прогресия  $S_n = \frac{1}{2}[2a_1 + (n-1)d]n$  получаваме системата  $\begin{cases} a_1 + d = 3 \\ a_1 + 2d = 5 \end{cases}$ , коята има единствено решение  $a_1 = 1$ ,  $d = 2$ .

Тогава  $S_8 = 64$ .

б) (2 точки) Да се реши уравнението  $\frac{1}{\log_3 x} + 3\log_3 x = 4$ .

Дефиниционната област на даденото уравнение е  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . Полагаме  $\log_3 x = y$  и получаваме квадратното уравнение  $3y^2 - 4y + 1 = 0$  с корени  $y_1 = 1$  и  $y_2 = \frac{1}{3}$ .

Тогава решенията на даденото уравнение са  $x_1 = 3$  и  $x_2 = \sqrt[3]{3}$ .

в) (2 точки) Да се реши уравнението  $4\sin^2 x = 4\sin x + 3$

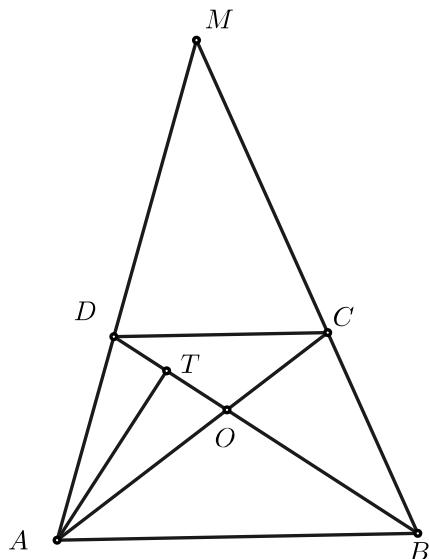
Полагаме  $\sin x = y$ ,  $|y| < 1$  и получаваме квадратното уравнение  $4y^2 - 4y - 3 = 0$  с корени  $y_1 = \frac{3}{2}$ , което не дава решения относно  $x$ ,  $y_2 = -\frac{1}{2}$ .

Тогава  $x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,  $x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$  при  $k$  произволно цяло число.

### Зад.3 (4 точки)

Даден е трапец  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), диагоналите на който се пресичат в точка  $O$ . Лицата на триъгълниците  $AOB$  и  $AOD$  са съответно 4 и 2. Да се намери:

- (2 точки) лицето на трапеца;
- (2 точки) лицето на  $DCM$ , където  $M$  е пресечната точка на бедрата на трапеца.



Построяваме права  $AT$ , перпендикулярна на  $DB$ . Това е височина както в триъгълник  $AOB$  (от върха  $A$  към  $OB$ ), така и в триъгълник  $AOD$  (от върха  $A$  към  $OD$ ). Лицата на  $AOB$  и  $AOD$  са съответно 4 и 2 и имат обща височина, следователно  $OB = 2OD$ . Триъгълниците  $AOB$  и  $COD$  са подобни, като страните на единия са два пъти по-големи от страните на другия, и лицата им се отнасят както квадратите на съответните елементи в тях, или  $\frac{S_{AOB}}{S_{COD}} = \frac{OB^2}{OD^2} = 4$ . Тогава  $S_{COD} = 1$ .

Триъгълниците  $AOD$  и  $BOC$  са равнолицеви, защото  $S_{AOD} = \frac{1}{2}AO \cdot OD \cdot \sin(AOD) = \frac{1}{2}2OC \cdot \frac{1}{2}OB \sin(BOC) = S_{BOC} = 2$ .

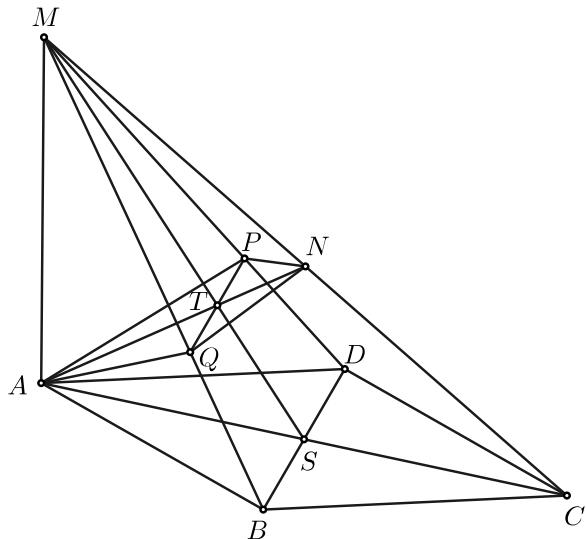
Търсеното лице  $S_{ABCD}$  на трапеца е  $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{AOD} + S_{ODC} + S_{BOC} = 9$ .

б) Триъгълниците  $AMB$  и  $DMC$  са подобни, като  $\frac{AB}{CD} = 2$ . За техните лица имаме съотношението  $\frac{S_{ABM}}{S_{DCM}} = 4$ , или  $S_{ABM} = 4S_{DCM}$ . Но  $S_{ABM} = S_{ABCD} + S_{DCM}$ . Така получаваме, че  $S_{DCM} = 3$ .

### Зад.4 (4 точки)

Дадена е четириизгълна пирамида  $ABCDM$  с основа ромб с диагонал  $BD = 4$ . Околният ръб  $MA$  с дължина 8 е перпендикулярен на основата, а околният ръб  $MC$  е с дължина 10. Да се намери:

- a) (2 точки) обемът на пирамидата  $ABCDM$ ;  
 б) (2 точки) лицето на сечението на пирамидата с равнина, успоредна на  $BD$  и минаваща през върха  $A$  и средата  $N$  на ръбъ  $MC$ .



- a) От правоъгълния триъгълник  $AMC$  намираме, че  $AC = 6$ . Основата на пирамидата е ромба  $ABCD$  с перпендикулярни диагонали с дължини  $AC = 6$ ,  $BD = 4$  и лице  $S_{ABCD} = 12$ .

Обемът на пирамидата е  $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot MA = 32$ .

б) В триъгълника  $ACM$  отсечките  $AN$  и  $MS$  са медиани и тяхната пресечна точка  $T$  е медицентър, или  $\frac{MS}{MT} = \frac{3}{2}$ , а  $AN = 5$ . В триъгълника  $MBD$ , през точка  $T$ , построяваме права, успоредна на  $BD$ , която пресича околните ръбове  $MB$  и  $MD$  съответно в точки  $Q$  и  $P$ . Търсеното сечение е 4-ъгълника  $AQNP$ .

От подобието на триъгълниците  $BDM$  и  $QPM$  получаваме  $\frac{BD}{PQ} = \frac{MS}{MT} = \frac{3}{2}$ . Така  $QP = \frac{8}{3}$ .

Околният ръб  $MC$  се проектира ортогонално върху равнината на основата в диагонала на ромба  $AC$ . Тогава ортогоналната проекция на точката  $N$  е точката  $S$ . От  $AS$  перпендикулярна на  $BD$  и теоремата за трите перпендикуляра следва, че  $AN$  е перпендикулярна на  $BD$ . Но  $BD$  е успоредна на  $PQ$  следователно диагоналите на сечението са перпендикулярни.

Тогава за търсеното лице  $S_{APNQ}$  получаваме  $S_{APNQ} = \frac{1}{2}AN.PQ.\sin 90^\circ = \frac{1}{2}.5.\frac{8}{3} = \frac{20}{3}$ .

Оценката се получава по формулата:

Оценка = 2 + k/5,

където  $k$  е броят на получените точки ( $k \geq 5$ ).