ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ "ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ" – СОФИЯ

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
08. 04. 2016 г.

ВТОРИ ВАРИАНТ

Критерии за оценка и примерни решения

ЗАДАЧА 1:

а) Да се реши уравнението $4^x - 2.2^x - 8 = 0$.

б) Да се реши уравнението $\sqrt{x-2} + 4 = x$.

в) Да се реши уравнението $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{1}{x+1} = 0$.

Решение:

а) ***(2 точки)*** От $4^x - 2.2^x - 8 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2.2^x - 8 = 0.$ Полагаме $2^x = t,\ t > 0$ и получаваме квадратното уравнение $t^2 - 2t - 8 = 0$ $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = \begin{cases} 4 > 0 \Rightarrow 2^x = 2^2 \\ -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2$ е решение.

б) ***(2 точки)*** ДМ за уравнението $\sqrt{x-2} = x - 4$ е множеството, за което $x - 2 \geq 0,\ x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4.$ Тогава получаваме $(x-2) = (x-4)^2 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \begin{cases} 6 \in \text{ДМ} \\ 3 \notin \text{ДМ} \end{cases} \Rightarrow x = 6 \text{ е решение.}$$

в) ***(1 точка)*** ДМ за уравнението $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{1}{x+1} = 0$ е множеството, за което $x - 3 \neq 0,\ x + 1 \neq 0.$

След привеждане под общ знаменател получаваме:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{x(x+1) + (x-3)}{(x-3)(x+1)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-3)(x+1)} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 1 \in \text{ДМ} \\ -3 \in \text{ДМ} \end{cases} \Rightarrow x = 1,\ x = -3 \text{ са решения.}$$

ЗАДАЧА 2:

а) Дадена е функцията $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$. Да се реши уравнението $|f(-2) - x| = 1 - f(2)$.

б) Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които квадратния тричлен $x^2 + mx + m - 1$ е точен квадрат.

в) Да се намери стойността на израза $B = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение:

а) ***(2 точки)*** $f(2)=\frac{2}{3},\ f(-2)=-\frac{2}{3}\Rightarrow |f(-2)-x|=1-f(2)\Leftrightarrow |3x+2|=1$ Тъй като $|3x+2|=\begin{cases}3x+2,\ 3x+2\ge 0\\ -(3x+2),\ 3x+2<0\end{cases}$, то при $x\ge -\frac{2}{3}\Rightarrow 3x+2=1\Rightarrow x=-\frac{1}{3}>-\frac{2}{3}$ е решение, а при $x<-\frac{2}{3}\Rightarrow -3x-2=1\Rightarrow x=-1<-\frac{2}{3}$ е също решение на модулното уравнение.

б) ***(2 точки)*** Квадратният тричлен $x^2+mx+m-1$ е точен квадрат. тогава и само тогава, когато дескриминантата му е нула, т. е. $D=m^2-4m+4=0\Rightarrow m=2$.

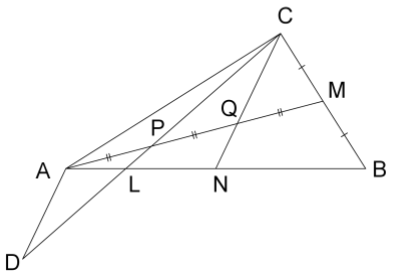
в) ***(1 точка)*** Тъй като $B=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\cos 2\alpha}$, то $\Rightarrow$ $B=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=-2$.

ЗАДАЧА 3: Страната AB на произволен триъгълник ΔABC е 10. Точките P и Q делят медианата AM на три равни части ($AP=PQ=QM$). Правите и CQ пресичат AB съответно в точките L и N. Да се намери:

а) отсечката LN;

б) радиусът на описаната окръжност около ΔNBC, ако $AC=8$ и $\angle ACB=90^\circ$.

Решение:



а) ***(3 точки)*** Построяваме $AD\parallel CN\ (D\in CL)$.

От $\Delta ADP\approx\Delta PQC\Rightarrow\frac{AD}{CQ}=\frac{AP}{PQ}=1$

От $\Delta ADL\approx\Delta LNC\Rightarrow\frac{AD}{CN}=\frac{AL}{LN}$.

Но $CN=\frac{3}{2}CQ$ защото Q е медицентър на ΔABC $\left(\frac{AQ}{QM}=\frac{2}{1}\right)$.

Тогава $\frac{AD}{CN}=\frac{AL}{LN}\Rightarrow\frac{AD}{\frac{3}{2}CQ}=\frac{AL}{LN}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{AL}{LN}\Rightarrow AL=\frac{2}{3}LN$.

От CN медиана $\Rightarrow AN=\frac{10}{2}=5$. Откъдето получаваме

$\Rightarrow 5=AN=AL+LN=\frac{2}{3}LN+LN\Rightarrow LN=3$.

б) ***(2 точки)*** $S_{NBC}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{4}AC.BC=\frac{6.8}{4}=12$ $(BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=6)$.

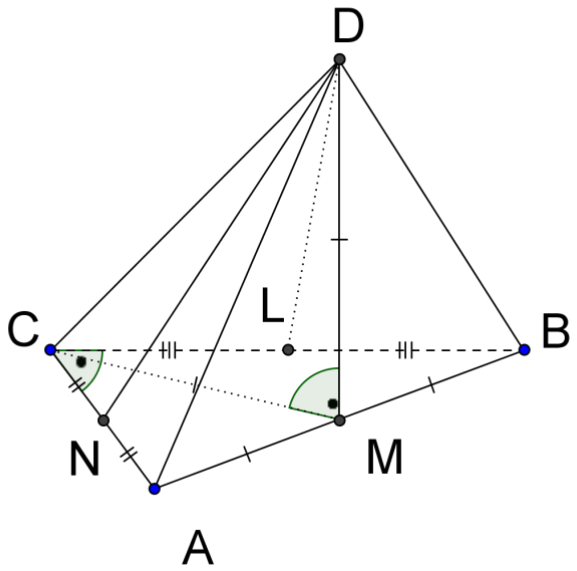
Но $12=S_{NBC}=\dfrac{NB.BC.CN}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{5.6.5}{12.4}=\dfrac{25}{8}$.

ЗАДАЧА 4: Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$ с основа правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C и радиус на вписаната окръжност $r = 2$. Околните ръбове AD, BD и CD сключват с равнината на основата ABC ъгъл 45°, а радиусът на описаната около $ABCD$ сфера е $R = 5$. Да се намери:

а) обемът на пирамидата $ABCD$;

б) радиусът на вписаната в пирамидата $ABCD$ сфера.

Решение: **а)** ***(3 точки)***



Околните ръбове AD, BD и CD сключват с равнината на основата ABC еднакъв ъгъл 45° и следователно върхът D се проектира ортогонално в центъра M на описаната около основата ΔABC окръжност, т.е. в средата M на хипотенузата .

Тогава $\angle MAC = \angle MBC = \angle MCD = 45^\circ \Rightarrow CM = AM = BM = MD$, т.е. M е център на описаната около $ABCD$ сфера и $R = AM = BM = CM = DM = 5$.

Означаваме $AB = c,\ BC = a,\ AC = b$.

От $\left| \begin{array}{l} a^2 + b^2 = c^2 \\ r = \dfrac{a+b-c}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 10^2 \\ 2 = \dfrac{a+b-10}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 8 \\ a = 8 \\ b = 6 \end{array} \right. \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{ab}{2} = 24$.

Тогава обемът на тетраедъра $ABCD$ може да се намери по формулата

$$V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.DM = \frac{24.5}{3} = 40.$$

б) ***(2 точки)***

$S_{ABD} = \dfrac{AB.DM}{2} = 25,\ \ S_{ABC} = 24$.

ΔADC е равнобедрен със страни $AC = 6,\ \ AD = CD = 5\sqrt{2}\ \ (CD = \sqrt{CM^2 + MD^2})$.

Следователно височината $DN = \sqrt{CD^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{41}$. Тогава $S_{ADC} = \frac{AC.DN}{2} = 3\sqrt{41}$.

Аналогично имаме:

ΔBDC - равнобедрен със страни $BC = 8,\ BD = CD = 5\sqrt{2}$ $(CD = \sqrt{CM^2 + MD^2})$.

Следователно височината $DL = \sqrt{CD^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{34}$. Тогава $S_{BDC} = \frac{BC.DL}{2} = 4\sqrt{34}$.

Когато $AB = 8$ и $BC = 6$ получаваме $S_{ADC} = 4\sqrt{34}$ и $S_{BDC} = 3\sqrt{41}$.

Тъй като пълната повърхнина на тетраедъра е

$$S_1 = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ADC} + S_{BDC} = 24 + 25 + 3\sqrt{41} + 4\sqrt{34} \Rightarrow r = \frac{3V}{S_1} = \frac{120}{49 + 3\sqrt{41} + 4\sqrt{34}}.$$

Оценката се получава по формулата:

***Оценка* = 2 + *k* / 5,**

където k е броят на получените точки (k ≥ 5).