ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ "ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ" – СОФИЯ

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
06. 07. 2018 г.

ПЪРВИ ВАРИАНТ

Критерии за оценка и примерни решения

ЗАДАЧА 1:

а) Да се реши уравнението $4^x + 2^x - 2 = 0$.

б) Да се реши уравнението $\log_2 2x + \log_2 x^2 = 1$.

в) Да се намери първият член на аритметична прогресия, за която $a_4 = 17,\ a_8 = 37$.

Решение:

а) ***(2 точка)*** От $4^x + 2^x - 2 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 2 = 0.$ Полагаме $2^x = t,\ t > 0$ и получаваме квадратното уравнение $t^2 + t - 2 = 0$ $t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} t_1 = 1 > 0 \Rightarrow 2^x = 2^0 \\ t_2 = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow\ x = 0$ е решение

б) ***(2 точки)*** $DM: x > 0.$ $\log_2 2x + \log_2 x^2 = 1 \Rightarrow \log_2[2x.x^2] = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \in DM$

в) ***(1 точка)*** $\left| \begin{array}{l} a_4 = a_1 + 3d = 17 \\ a_8 = a_1 + 7d = 37 \end{array} \right. \Rightarrow d = 5,\ a_1 = 2.$

ЗАДАЧА 2:

а) Дадени са функциите $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ и $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Да се реши уравнението $f(x) = \max\{f(1), g(4)\}$.

б) Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които уравненията $x^2 + x + m = 0$ и

$x^2 + mx + m - 1 = 0$ имат общ корен.

в) Ако $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$ и $\alpha \in \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, да се намери $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Решение:

а) ***(2 точки)***

$f(1) = 1/3,\ g(4) = 3/4 \Rightarrow \max\{f(1), g(4)\} = 3/4\ \ f(x) = \max\{f(1), g(4)\} \Rightarrow \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow 4x = 3x + 6 \Rightarrow x = 6.$

б) ***(2точки)*** $x^2 + x + m = 0$ и $x^2 + mx + m - 1 = 0$ имат общ корен

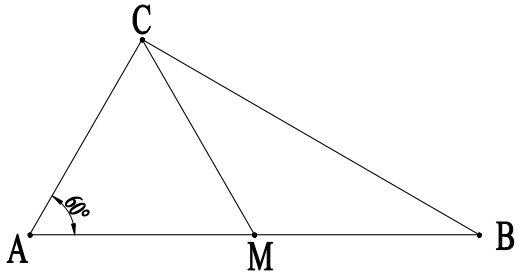
$x_0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_0^2 + x_0 + m = 0 \\ x_0^2 + mx_0 + m - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x_0 = \dfrac{1}{m-1} \Rightarrow m(m^2 - 2m + 2) = 0 \Rightarrow m = 0$

в) ***(2 точки)*** $\left|\begin{array}{l} \mathrm{tg}\alpha = 3/4 \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \cos^2\alpha = 16/25 \\ \sin^2\alpha = 9/25 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \cos\alpha = -4/5 \\ \sin\alpha = -3/5 \end{array}\right.$ защото $\alpha \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

ЗАДАЧА 3: Даден е ΔABC със страни $AB = 4,\ AC = 2,\ BC = 2\sqrt{3}$. Да се намери:

а) медиана CM;

б) радиусът на описаната около ΔABC окръжност.



Решение:

а) ***(2 точки)*** $CM = \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2CB^2 - AB^2} = 2$.

б) ***(2 точки)*** В

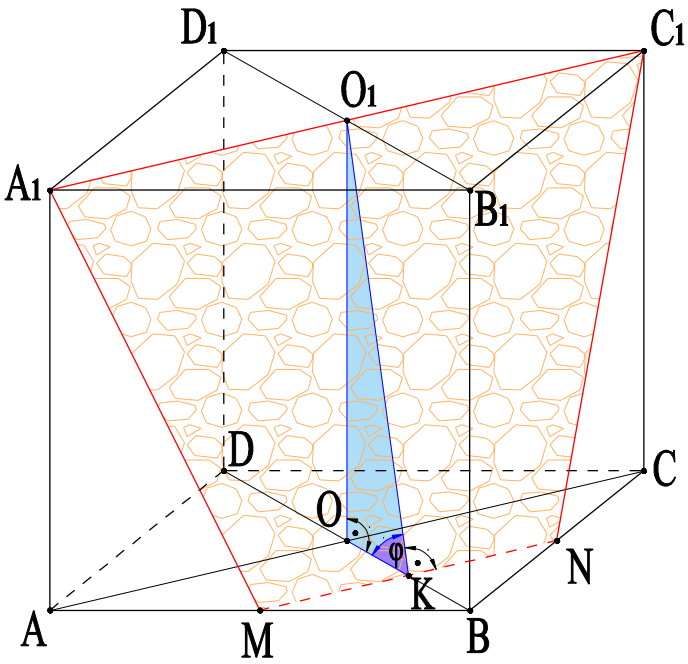
$\Delta AMC \Rightarrow AM = MC = CA = 2 \Rightarrow \angle MAC = 60^\circ \Rightarrow \frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = 2$

ЗАДАЧА 4: Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ със страна с дължина 6. През средите M и N, съответно на ръбовете AB и BC, и през върха C_1 е построена равнина ρ. Да се намери:

а) тангенсът на двустенния ъгъл, който равнината ρ сключва с равнината на основата $ABCD$;

б) лицето на сечението на куба с равнината ρ.

Решение:



а) ***(3 точки)***

От $\left|\begin{array}{l} MN \parallel AC \\ AC \parallel A_1C_1 \end{array}\right. \Rightarrow MN \parallel A_1C_1$. Следователно сечението е равнобедрения трапец MNA_1C_1

Нека $MN \cap DB = K \Rightarrow \angle(\rho, (ABCD)) = \angle OKO_1 = \varphi$.

$OO_1 = 6,\ KO = \frac{BD}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow tg\varphi = \frac{OO_1}{KO} = 2\sqrt{2}$

б) ***(2 точки)***

$\left.\begin{array}{l} MN \perp (DBB_1D_1) \\ KO_1 \in (DBB_1D_1) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \perp KO_1 \Rightarrow$ KO_1 е височина в равнобедрения трапец MNA_1C_1.

$KO_1 = \sqrt{OO_1^2 + KO^2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$. Следователно $S_{MNC_1A_1} = \frac{A_1C_1 + MN}{2} KO_1 = \frac{6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{9}{2}\sqrt{2} = \frac{81}{2}$.

Оценката се получава по формулата:

***Оценка* = 2 + *k* / 5,**

където k е броят на получените точки (k ≥ 5).