ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ "ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ" – СОФИЯ

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
05. 07. 2014 г.

ВТОРИ ВАРИАНТ

Критерии за оценка

ЗАДАЧА 1:

а) Да се реши уравнението $x^4 + x^2 = 20$.

б) Да се реши уравнението $\lg^2 x + 3\lg x + 2 = 0$.

в) Да се реши неравенството $\dfrac{x^2 + x - 6}{(4-x)^2} \geq 0$.

Решение:

а) ***(2 точки)*** Полагаме $x^2 = y;\ y \geq 0$ и получаваме

$$y^2 + y - 20 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \begin{cases} 4 \in [0;\infty) \\ -5 \notin [0;\infty) \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$ са решения на уравнението.

б) ***(2 точки)*** ДМ: $x > 0$. Полагаме $\lg x = t$ и получаваме

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} -1 \Rightarrow x_1 = 10^{-1} > 0 \\ -2 \Rightarrow x_1 = 10^{-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{10} \text{ и } x_2 = \frac{1}{100}$$ са решения на

уравнението.

в) ***(2 точки)*** ДМ: $(4-x)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$. Тъй като $x^2 + x - 6 = (x-3)(x+2)$, то по метода на интервалите получаваме $x \in (-\infty;\ -2] \cup [3;\ 4) \cup (4;\ \infty)$.

ЗАДАЧА 2:

а) Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} 2^x - y = 1 \\ 2^x + y = 3 \end{array} \right.$.

б) Да се намерят корените на уравнението $\cos 2x = 2 - \cos^2 x$.

в) Да се определи $f(m) = \dfrac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} + \dfrac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението

$x^2 - \dfrac{x}{2} + m = 0$.

Решение:

а) ***(2 точки)*** Полагаме $2^x = t;\ t > 0$ и получаваме $\left| \begin{array}{l} t - y = 1 \\ t + y = 3 \end{array} \right. \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = 2 > 0 \Rightarrow x = 1$.

Тогава $y = 1$ и решението на системата е $\left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right.$.

б) ***(2 точка)*** Тъй като $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, то като положим $\cos x = y$; $y \in [-1;1]$ получаваме

$2y^2 - 1 = 2 - y^2 \Rightarrow 3y^2 = 3 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1$, т.е. $x = k\pi$.

в) ***(2 точки)*** По формулите на Виет намираме

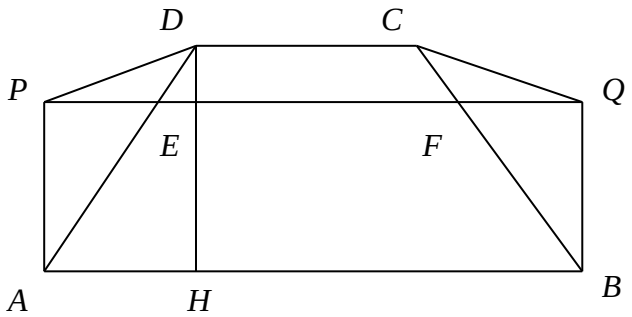
$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2} > 0;\ x_1x_2 = m > 0 \Rightarrow f(m) = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{m}} = \frac{1}{2\sqrt{m}},\ m > 0.$$

ЗАДАЧА 3:

Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ $(AB \| CD)$ с основи $AB = 8$ и $CD = 4$ и $\angle ABC = 60^0$. Да се намери:

а) лицето на трапеца;

б) дължината на отсечката EF, където E и F са съответно пресечните точки на отсечката PQ с бедрата AD и BC, а P и Q са върховете на равнобедрените триъгълници APD и BQC с $\angle APD = \angle BQC = 120^0$..



Решение:

а) ***(1 точки)*** $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} DH$, където $DH \perp AB$. Тъй като $AH = \frac{AB - CD}{2} = 2$

$$\frac{DH}{AH} = tg60^\circ \Rightarrow DH = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}12.2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

б) ***(3 точка)*** От условието, че трапецът $ABCD$ и триъгълниците APD, BQC са равнобедрени, а $\angle ABD = 60^\circ$ и $\angle APD = 120^\circ \Rightarrow \angle PAD = 30^\circ$, $\angle PAB = 90^\circ$ и $PQ \| AB$, $PQ = AB$, т.е. $PQ = 8$.

Означаваме $PE = FQ = x \Rightarrow AE = 2x$. Но $AH = 2$ и $\angle ADH = 30^\circ \Rightarrow AD = 4 \Rightarrow ED = 4 - 2x$.

Тъй като $\angle DPE = 30^\circ$ и $\angle EDP = 30^\circ \Rightarrow 4 - 2x = x \Rightarrow 3x = 4$, т.е. $x = \frac{4}{3}$. Тогава

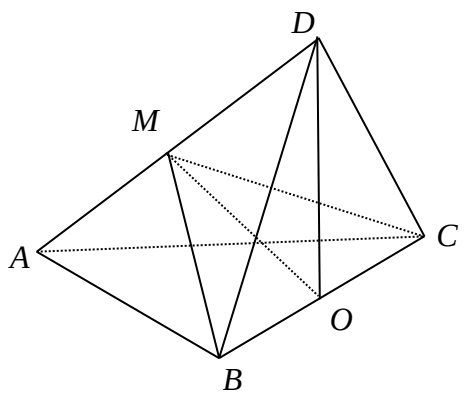
$$EF = PQ - 2x = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

ЗАДАЧА 4:

Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$ с ръбове $AB = AC = AD = BD = CD = a$ и $BC = a\sqrt{2}$. Да се намери:

а) радиусът на сферата, описана около пирамидата $ABCD$;

б) синусът на ъгъла между стените ABD и ACD.



Решение: **а)** ***(2 точки)*** От условието, че $AB = AC = a$ и $BC = a\sqrt{2}$ по обратната Питагорова теорема следва, че $\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow$ центърът O на описаната около ΔABC окръжност е среда на BC и $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} = OB = OC$. По същите съображения за $\Delta BDC \Rightarrow \angle BDC = 90^\circ$ и $OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, т.е. центърът на описаната около пирамидата сфера е точката O, а радиусът на сферата е $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

б) ***(2 точки)*** Построяваме равнина $\lambda \perp AD,\ \lambda \in BC \Rightarrow$ линейният ъгъл φ на двустенния $\angle[(ABD);\ (ACD)] = \angle BMC$. Тъй като $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (равностранни) $\Rightarrow BM = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

По косинусовата теорема за $\Delta BMC \Rightarrow BC^2 = BM^2 + CM^2 - 2BM.CM.\cos\varphi$. Откъдето получаваме $\cos\varphi = \frac{BM^2 + CM^2 - BC^2}{2BM.CM} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2a^2}{2\frac{3a^2}{4}} = -\frac{1}{3}$.

Оценката се получава по формулата:

***Оценка* = 2 + *k* / 5,**

където k е броят на получените точки (k ≥ 5).